Toets Partiële Differentiaalvergelijkingen
13 mei 2003, 10.15–13.00 uur

1. Los het volgende Cauchy probleem op:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u(x,0) = \frac{1}{2}x.$$

2. Laat zien dat de uitdrukking

$$(1+x^2)(4+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (5+2x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

hyperbolisch is en bepaal de karakteristieken.
Aanwijzing: $\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{1+t^2}$.

3. Bepaal met behulp van de methode van d'Alembert de oplossing van de hyperbolische vergelijking:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

als de beginvoorwaarden worden gegeven door

$$u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = xe^{x^2}.$$

4. Los de volgende hyperbolische vergelijking formeel op:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0,$$

als de beginvoorwaarden worden gegeven door

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0.$$